BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

İNFORMATİKA

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ТИПА КОУЭЛЛА

Г.Ю.МЕХТИЕВА, М.Н.ИМАНОВА, В.Р.ИБРАГИМОВ
Бакинский Государственный Университет
ibvag@yahoo.com, imn_bsu@mail.ru

Последнее время многие ученые отдают предпочтение исследованию интегральных уравнений с переменными границами, которые описывают некоторые явления естествознания, как задачи окружающей среды, задачи экологии, распространению гриппов и других сезонных болезней и т.д. Традиционным методом решения таких уравнений является метод квадратур, который впервые применил Вольтерра к решению интегральных уравнений с переменной границей. В отличие от названных методов, для решения интегральных уравнений с переменной границей здесь предлагаются методы с забеганием вперед с постоянными коэффициентами.

Введение. Рассмотрим следующее интегральное уравнение типа Вольтерра-Урысона:

$$y(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,s,y(s))ds, \quad x_0 \le x \le X. \tag{1}$$

Интегральное уравнение (1) обычно называют интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Это связано с тем, что уравнение (1) в линейном случае основательно исследовано Вольтерром и на достаточно высоком уровне изучено их возникновение в практических задачах (см., напр., [1]-[2]). Отметим, что сингулярные интегральные уравнения с переменной границей впервые в частном виде было исследовано Абелем (см., напр., [1]). Учитывая, что найти точное решение уравнения (1) даже в линейном случае удается не всегда, многие специалисты для его решения построили приближенные методы (см., напр., [3]-[7]). Как известно, существуют некоторые классы методов для решения уравнения (1). Одним из популярных численных методов является метод квадратур, ставший уже классическим. Прежде чем показать основной недостаток метода квадратур, предположим, что уравнение (1) имеет единственное решение, определенное на отрезке $[x_0, X]$, а ядро $K(x,s,y)$ определено в области $\overline{G} = \{x_0 \le s \le x + \varepsilon \le X,\ |y| \le a\}$, где имеет частные производные до некоторого порядка p, включительно, а заданная достаточно гладкая функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, X]$. С целью определения приближенных значений его решений, отрезок $[x_0, X]$ разобьем на N равных частей с точками $x_i = x_0 + ih\ (i = 0,1,2,...,N)$. Обозначим через y_i приближенные, а через $y(x_i)$ точные значения решения уравнения (1) в точках $x_i\ (i = 0,1,...,N)$. Тогда метод квадратур, примененный к решению уравнения (1), может быть записан в следующем виде:

$$y(x_n) = f(x_n) + h\sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j K(x_n, x_j, y(x_j)) + R_n, \tag{2}$$

где R_n является остаточным членом метода квадратур, $\overline{a}_j\ (j = 0,1,...,n)$ - некоторые действительные числа, называемые коэффициентами метода квадратур. Отбрасывая остаточный член R_n, получаем следующий метод

$$y_n = f_n + h\sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j K(x_n, x_j, y_j),\ \ (n = 1,2,3,...),\ \ y_0 = f(x_0), \tag{3}$$

который называют методом квадратур с переменной границей. Метод (3) при $\overline{a}_n \neq 0$ является неявным, а при $\overline{a}_n = 0$, соответственно, явным. Как следует из соотношений (3), для каждого значения величины n ядро интеграла функции $K(x, s, y)$ вычисляется n раз и при увеличении значений n возрастает количество вычислений функции $K(x, s, y)$. Следовательно, на каждом шаге возрастает количество вычислений, что является основным недостатком метода квадратур. Некоторые авторы для устранения указанного недостатка метода (3) предложили использовать методы Рунге-Кутта, Адамса или же двусторонние методы (см., напр., [5]-[6]). А некоторые авторы для численного решения уравнения (1) предложили использовать методы, подобные следующим k-шаговым методам с постоянными коэффициентами (см., напр., [8]-[11]) :

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h\sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i}), \tag{4}$$

хорошо исследованные для численного решения задачи Коши:

$$y' = f(x, y),\ \ y_0 = f(x_0), \tag{5}$$

при этом учитывая некоторую эквивалентность задачи (5) и уравнения (1). Как известно, во многих случаях, при исследовании задачи (5) сводят ее к решению уравнения (1). Например, при построении методов Адамса, при доказательстве существования и единственности решения задачи (5). В отличие от этих работ, здесь предлагается метод, обеспечивающий постоянность количества вычислений ядра интеграла на каждом шаге интегрирования.

§1.Построение метода типа Коуэлла

Известный астроном Коуэлл в 1909 году построил метод типа (4) (см., напр., [12]), который в дальнейшем ученые назвали методом с забеганием вперед (см. [16]). Такие методы построены известными учеными Лапласом и Стекловым (см. [13]). Преимущество этих методов доказано в [16], а в [17] для их реализации построен метод прогноза и коррекции. Учитывая связь между уравнением (1) и задачей (5), здесь построим методы типа Коуэлла, использование которого связано со следующим.

Как известно, при вычислении y_i - приближенного значения решения уравнения (1) по методам (3), используются информации о функциях $y(x)$ в предыдущих точках. Однако в некоторых случаях для определения более точного значения функции $y(x)$ в точках x_i возникает необходимость получения ее значений не только в предыдущих, но и в последующих точках, например, в случаях, когда функция $y(x)$ сильно возрастает или убывает. В связи с этим, метод (3) модифицируется в следующей форме:

$$y_n = f_n + h\sum_{j=0}^{n+m} a_j K(x_{n+m}, x_j, y_j),\ n = 1,2,3,...(m > 0), \tag{6}$$

где m - целозначная величина, $f_n = f(x_n)$ $(n = 1,2,...)$, коэффициенты a_j $(j = 0,1,...,n+m)$ - действительные числа.

Рассмотрим следующую разность:

$$y_{n+1} - y_n = f_{n+1} - f_n + h\sum_{j=0}^{n+m} a_j (K(x_{n+m+1}, x_j, y_j) - K(x_{n+m}, x_j, y_i)) +$$
$$+ ha_{n+m+1}K(x_{n+m+1}, x_{n+m+1}, y_{n+m+1}).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n = f_{n+1} - f_n + h^2\sum_{j=0}^{n+m} a_j K'_x(\xi_{n+m}, x_j, y_j) + \\ + ha_{n+m+1}K(x_{n+m+1}, x_{n+m+1}, y_{n+m+1}), \end{aligned} \tag{7}$$

где $x_{n+m} < \xi_{n+m} < x_{n+m+1}$.

Используя подобные преобразования из [10], равенство (7) можно написать в виде:

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n = f_{n+1} - f_n + hy'(\xi_{n+m}) - hf'(\xi_{n+m}) - \\ - hK(\xi_{n+m}, \xi_{n+m}, y(\xi_{n+m})) + ha_{n+m+1}K(x_{n+m}, x_{n+m+1}, y_{n+m+1}). \end{aligned} \tag{8}$$

Заменяя здесь производные функции через их значения, используя интерполяционный многочлен Лагранжа и полагая $n := n + k - m$, получим, что:

$$\sum_{i=0}^{k-m} \alpha_j y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k-m} \alpha_j f_{n+i} + h\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \beta_i^{(j)} K(x_{n+j}, x_{n+i}, y_{n+i}), \tag{9}$$

где коэффициенты α_l $(l = 0,1,...,k-m)$, $\beta_i^{(j)}$ $(i, j = 0,1,...,k)$ - некоторые действительные числа. Как известно, в интегральных уравнениях типа Вольтерра при $s > x$ ядро приравнивается к нулю, т.е. $K(x,s,y) = 0$. Поэтому, учитывая участие слагаемых типа $K(x_\nu, x_{\nu+l}, y_{\nu+l})$ $(l > 0)$ в методе (9), область определения ядра функции $K(x,s,y)$ расширили на ε. Однако многошаговые методы типа (9) можно построить так, чтобы члены типа $K(x_\nu, x_{\nu+l}, y_{\nu+l})$ $(l > 0)$ отсутствовали. Например, $\beta_i^{(j)} = 0$ при $i > j$ $(i, j = 0,1,...,k)$. Здесь алгоритмы построены в двух вариантах. В одном варианте используется методы типа (9) при $\left|\beta_{j+1}^{(j)}\right| + ... + \left|\beta_k^{(j)}\right| \neq 0$, а в другом варианте при $\beta_i^{(j)} = 0, \;\; i.j(i,j = 0,1,...,k)$.

Для определения коэффициентов метода (9) здесь предлагается метод неопределенных коэффициентов. С этой целью рассмотрим специальный случай и положим $K(x,s,y) \equiv F(s,y)$. Тогда метод (9) преобразуется к виду:

$$\sum_{i=0}^{k-m} \alpha_j y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k-m} \alpha_j f_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} \beta_i^{(j)} F(x_{n+i}, y_{n+i}). \quad (10)$$

Если обозначим через

$$\gamma_i = \sum_{j=0}^{k} \beta_i^{(j)} \;\; (i = 0,1,2,...,k), \quad (11)$$

то метод (10) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=0}^{k-m} \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k-m} \alpha_i f_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k} \gamma_i F_{n+i} \qquad (F_\nu = F(x_\nu, y_\nu),\ \nu = 0,1,2,...). \quad (12)$$

Метод (12) является методом с забеганием вперед, примененный к решению следующей задачи:

$$y'(x) = f'(x) + F(x,y), \;\; y(x_0) = f(x_0),$$

где $f(x)$ - известная функция.

Отметим, что устойчивые методы с забеганием вперед подчинялись закону Дальквиста, который заключается в том, что если метод (4) или (12) устойчив, то имеет место $p \leq 2[k/2] + 2$. Следовательно, $p_{\max} = k + 2$ для четных k, т.е. $k = 2r$ и $p_{\max} = k + 1$ для нечетных k (см. [14]). Здесь через p обозначена степень метода (4), которая определяется следующим образом. Целозначную величину p называют степенью метода (4), если для достаточно гладкой функции $y(x)$ имеет место:

$$\sum_{i=0}^{k} (\alpha_i y(x+ih) - h\beta_i y'(x+ih)) = O(h^{p+1}), \;\; h \to 0. \quad (13)$$

Метод (4) является устойчивым, если корни многочлена $\rho(\lambda) \equiv \alpha_k \lambda^k + \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + ... + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней.

Отметим, что по теореме Дальквиста должно быть $\alpha_k \neq 0$. Поэтому ограничения на степень k-шагового метода, полученного Дальквистом, не распространяются на методы с забеганием вперед. Следовательно, если существуют устойчивые методы типа (4) со степенью $p > 2[k/2] + 2$, то они непременно должны быть методами с забеганием вперед. Первый метод с таким свойством и со степенью $p = k + 2$ построен в [15] при $k = 3$, $m = 1$. А в [16] исследован метод (16) при $f(x) = 0$ и доказано существование устойчивых методов со степенью $p = k + m + 1$, для реализации которых предложен метод прогноза-коррекции. Коэффициенты метода (9) определяем по следующей схеме. Сначала определяем коэффициенты метода (12), а затем из системы (11) линейных алгебраических уравнений находим коэффициенты метода (10). Для нахождения коэффициентов метода (12) предположим, что непрерывная функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, X]$, где имеет непрерывные производные до некоторого порядка $p+1$, включительно. А непрерывная по совокупности аргументов функция $F(x.y)$ определена в области $D=\{x \le x \le X,\ |y| \le r\}$ и там же имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка p, включительно. Для простоты изложений обозначим через $z(x)=y(x)-f(x)$. Тогда метод (12) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=0}^{k-m} \alpha_i z_{n+i} = h\sum_{i=0}^{k} \gamma_i z'_{n+i} \,. \tag{14}$$

После учета следующих разложений

$$z(x+ih) = z(x) + ihz'(x) + \frac{(ih)^2}{2!} z''(x) + \ldots + \frac{(ih)^p}{p!} z^{(p)}(x) + O(h^{p+1}) \,,$$

$$z'(x+ih) = z'(x) + ihz''(x) + \frac{(2h)^2}{2!} z'''(x) + \ldots + \frac{(ih)^{p-1}}{(p-1)!} z^{(p)}(x) + O(h^{p+1}) \,,$$

в равенстве (17), имеем:

$$(\sum_{i=0}^{k-m} \alpha_i) z(x) + h(\sum_{i=0}^{k-m} i\alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \gamma_i) z'(x) + h^2(\sum_{i=0}^{k-m} \frac{i^2}{2!}\alpha_i - \sum_{i=0}^{k} i\gamma_i) z''(x) + \ldots +$$

$$+ h^p(\sum_{i=0}^{k-m} \frac{i^p}{p!}\alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \frac{i^{p-1}}{(p-1)!}\gamma_i) z^{(p)}(x) = R_n + O(h^{p+1}), \tag{15}$$

где $x = x_0 + nh$ - фиксированная точка.

Если предположить, что метод (14) имеет степень p, то $R_n = O(h^{p+1})$, то, учитывая линейную независимость системы

$$z(x), z'(x), z''(x), \ldots, z^{(p)}(x), \text{ или } 1, h, h^2, \ldots, h^p \,,$$

из (15) получаем, что

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{k-m} \alpha = 0; \qquad \sum_{i=0}^{k-m} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \,, \\ \sum_{i=0}^{k-m} \frac{i^l}{l!}\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \frac{i^{l-1}}{(l-1)!}\gamma_i \quad (l = 2,3,\ldots,\text{p}). \end{gathered} \tag{16}$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов получили однородную систему линейных-алгебраических уравнений, в которой количество неизвестных равно $2k-m+2$. Для того, чтобы система (16) имела решение, отличное от нуля, должно иметь место: $p+1<2k-m+2$. Отсюда следует, что $p_{\max} = 2k-m$. Можно доказать, что метод с максимальной степенью $p=2k-m$ единственен. Однако, метод типа (9) со степенью $p=2k-m$ не единственен. Это следует из системы (11), количество решений которого больше, чем 1.

Рассмотрим случай $k = 3$ и $m = 1$. В этом случае метод типа (14) с максимальной степенью $p = 5$ имеет следующий вид (см., напр.,[15]):

$$y_{n+2} = (8y_{n+1} + 11y_n)/19 + f_{n+2} - (8f_{n+1} + 11f_n)/19 - \\ - h(F_{n+3} - 24F_{n+2} - 57F_{n+1} - 10F_n)/57, \qquad (17)$$

который устойчив. Остаточный член метода (17) записывается в виде:

$$R_n = \frac{11}{3420} h^6 y^{(VI)}(x_n) + O(h^7).$$

Теперь, при $k = 3$ и $m = 1$, построим устойчивые методы типа (9), имеющие степень $p = 5$. Как было отмечено, таких методов несколько и приведем из них следующие:

$$y_{n+2} = (8y_{n+1} + 11y_n)/19 + f_{n+2} - (8f_{n+1} + 11f_n)/19 - h(K(x_{n+3}, x_{n+3}, y_{n+3}) - \\ - 12K(x_{n+2}, x_{n+2}, y_{n+2}) - 27K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) - 10K(x_{n+1}, x_n, y_n) + \\ - 12K(x_{n+3}, x_{n+2}, y_{n+2}) - 15K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) - \\ - 10K(x_{n+2}, x_n, y_n) - 15K(x_{n+3}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 10K(x_{n+3}, x_n, y_n))/57, \qquad (18)$$

$$y_{n+2} = (8y_{n+1} + 11y_n)/19 + f_{n+2} - (8f_{n+1} + 11f_n)/19 - (K(x_{n+3}, x_{n+3}, y_{n+3}) - \\ - 48K(x_{n+2}, x_{n+2}, y_{n+2}) - 114K(x_{n+3}, x_{n+1}, y_{n+1}) - 20K(x_n, x_n, y_n) + \\ - 10K(x_{n+1}, x_n, y_n) + 57K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 10K(x_{n+2}, x_n, y_n) + \\ + 24K(x_{n+3}, x_{n+2}, y_{n+2}) + 10K(x_{n+3}, x_n, y_n))/57, \qquad (19)$$

$$y_{n+2} = (8y_{n+1} + 11y_n)/19 + f_{n+2} - (8f_{n+1} + 11f_n)/19 - (2K(x_{n+3}, x_{n+3}, y_{n+3}) - \\ - 48K(x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n+2}) - 57K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) - 20K(x_{n+1}, x_n, y_n) - \\ - K(x_{n+2}, x_{n+3}, y_{n+3}) + 24K(x_{n+3}, x_{n+2}, y_{n+2}) + 10K(x_{n+3}, x_n, y_n))/57. \qquad (20)$$

Как было отмечено выше, многошаговые методы построим в двух вариантах. Методы (18)-(20) относятся к первому варианту, т.е. в случае, когда $\left|\beta_{j+1}^{(j)}\right| + ... + \left|\beta_k^{(j)}\right| \neq 0$. Теперь рассмотрим следующие методы, которые относятся ко второму варианту:

$$y_{n+2} = (8y_{n+1} + 11y_n)/19 + f_{n+2} - (8f_{n+1} + 11f_n)/19 + h(K(x_n, x_n, y_n) + \\ + 2K(x_{n+1}, x_n, y_n) + 2K(x_{n+2}, x_n, y_n) + 5K(x_{n+3}, x_n, y_n) + 30K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + \\ + 11K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 16K(x_{n+3}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 12K(x_{n+2}, x_{n+2}, y_{n+2}) + \\ + 12K(x_{n+3}, x_{n+2}, y_{n+2}) - K(x_{n+3}, x_{n+3}, y_{n+3}))/57. \qquad (21)$$

Известно, что множество устойчивых методов с одинаковой степенью обеспечивает подбор методов с наилучшими свойствами. Этими свойствами могут быть расширение их области устойчивости, минимизация коэффициентов главного члена в асимптотическом представлении погрешности метода и т.д.

Отметим, что для использования методов (18)-(20) можно воспользоваться подобными методами прогноза-коррекции, построенными в работе [17]. В одном варианте метод прогноза - коррекции можно построить в следующем виде:

$$\bar{y}_{n+2} = y_{n+2} + f_{n+2} - f_{n+1} + h(2K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + \\ + K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) - K(x_n, x_n, y_n))/2. \quad (22)$$

$$\breve{y}_{n+2} = y_{n+1} + f_{n+2} - f_{n+1} + h(5K(x_{n+2}, x_{n+2}, \bar{y}_{n+2}) + \\ + 5K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 3K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) - K(x_n, x_n, y_n))/12. \quad (23)$$

$$\hat{y}_{n+2} = y_n + f_{n+2} - f_n + h(K(x_{n+2}, x_{n+2}, \breve{y}_{n+2}) + \\ + 2K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 2K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+1}, x_n, y_n) - \\ - K(x_{n+1}, x_n, y_n) + K(x_n, x_n, y_n))/3. \quad (24)$$

$$\bar{y}_{n+3} = \hat{y}_{n+2} + f_{n+3} - f_{n+2} + h(23K(x_{n+2}, x_{n+2}, \hat{y}_{n+2}) - \\ - 10K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) - 6K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+3}, x_n, y_n) + \\ + 3K(x_{n+2}, x_n, y_n) + K(x_{n+1}, x_n, y_n))/12. \quad (25)$$

$$\hat{y}_{n+3} = \hat{y}_{n+2} + f_{n+3} - f_{n+2} + h(9K(x_{n+3}, x_{n+3}, \bar{y}_{n+3}) + \\ + 19K(x_{n+3}, x_{n+2}, \hat{y}_{n+2}) - 2K(x_{n+3}, x_{n+1}, y_{n+1}) - 2K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + \\ - K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+3}, x_n, y_n))/24. \quad (26)$$

В качестве метода коррекции используем метод (21) после замены в правой его части величины y_{n+2} и y_{n+3} величинами $\hat{y}_{n+2}$ и $\hat{y}_{n+3}$, соответственно

INPUT initial values y_0, y_1; endpoints x_0, X; function $f(x)$
and $K(x, z, y)$; positive integer N.
OUTPUT Approximation y_{n+2} to $y(x_{n+2})$.
STEP 1 Set $h = (x - x_0)/N$.
STEP 2 For $n = 0,1,2,\ldots, N-3$ do STEP 3-7.
STEP 3 Set $x_n = x_0 + nh$.
STEP 4 Set $\bar{y}_{n+2}, \breve{y}_{n+2}, \hat{y}_{n+2}$. (Compute by formulas (22), (23) and (24).)
STEP 5 Set $\bar{y}_{n+3}, \hat{y}_{n+3}$. (Compute by formulas (25) and (26).)
STEP 6 Set y_{n+2}. (Update y_{n+2} and y_{n+3} by $\hat{y}_{n+2}$ and $\hat{y}_{n+3}$ in right hand side of (21), correspondingly, then computes.)
STEP 7 OUTPUT $(x_{n+2}; y_{n+2})$.
STEP 8 STOP.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полищук Е.М. Вито Вольтера. Ленинград: Наука, 1977, 112 с.
2. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982, 304 с.
3. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969, 210 с.
4. Мамедов Я.Д., Аширов С.А. Методы последовательных приближений для решения операторных уравнений. Ашхабад: 1980, 120 с.
5. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, про-

граммы. Киев: Науково Думка, 1986.
6. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям. Методы решения. М.: Факториал Пресс, 2000, 384с.
7. Atkinson K.E. A survey of numerical methods for solving nonlinear integral equations // Journal of integral equations and applications, 1992, №1, v. 4, p. 15-46.
8. Lubich Ch. Runqe-Kutta theory for Volterra and Abel Integral Equations of the Second Kind // Mathematics of computation 1983, № 163, v. 41, p. 87-102.
9. Brunner H. The Solution of Volterra integral equations of the first kind by piecewise polynomials // J.Math. And Appl. 1973, №12, p.295-302.
10. Мехтиева Г.Ю., Иманова М.Н. Об одном применении конечно-разностного метода // Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2008, №2, c.73-78.
11. Мехтиева Г.Ю., В.Р.Ибрагимов, Иманова М.Н. Об одной модификации метода квадратур // Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2009, №3, c.101-108.
12. Cowell P.H., Cromelin A.C.D. Investigation of the motion of Halley`s comet from 1759 to 1910 // Appendix to Greenwich Observations for 1909, Edinburgh, p.1-84.
13. Мухин И.С. К накоплению ошибок при численном интегрировании дифференциальных уравнений // Прикл. мат. и мех. 1952, в. 6, с.752-756.
14. Dahlquist G. Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations // Math. Scand, 1956, №4, p.33-53.
15. Ибрагимов В.Р. Один нелинейный метод численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Диф. урав. и применения, Труды докл. Второй Международ. конф. Руссе. Болгария: 1982, с.310-319.
16. Ибрагимов В.Р. Об одной связи между порядком и степенью для устойчивой формулы с забеганием вперед // Ж.Вычис. мат. и мат. физ., 1990, № 7, с.1045-1056.
17. Ибрагимов В.Р. Сходимость метода прогноза-коррекции // Годш. на висшите учеб. завед. Прикл.матем. София: НРБ. 1984, с.187-197.
18. Joukovskaya L.V. Iterative method for solving nonlinear integral equation describing rolling solution in string theory // Theoritical and Mathematical Physics, 2006, 146(3), p. 335-342.
19. Maleknejad K., Nouri K., Mollapourasl R. Existence of solutions for some nonlinear integral equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14, p. 2559-2564.
20. Muhammad M., Mori M. Double expontial formulas for numerical indefinite integration // Journal of Computationaland Applied Mathematics, 2003, 161, p. 431-448.
21. Maleknejad K., Tavassoli Kajani M. Solving second kind integral equations by Galerkin methods with hybrid Legendre and block-pulse functions // Applied Mathematics and Computation, 2003, 145, p. 623-629.

BİR TİPLİ KOUELL ÜSULUNUN TƏTBİQİ HAQQINDA

Q.Y.MEHDİYEVA, M.N.İMANOVA, V.R.İBRAHİMOV

XÜLASƏ

Son vaxtlar alimlər ətraf mühit və ekologiya məsələləri, qrip və digər mövsümi xəstəliklər kimi təbiət hadisələrini təsvir edən dəyişən sərhədli inteqral tənliklərin tədqiqinə üstünlük verirlər. Bu tənliklərin həlli üçün ənənəvi olan kvadratur üsulu ilk dəfə Volter tərəfindən dəyişən sərhədli inteqral tənliklərin həllinə tətbiq edilmişdir. Bu üsuldan fərqli olaraq təklif olunan işdə dəyişən sərhədli inteqral tənliklərin həlli üçün sabit əmsallı irəliyə qaçma üsulu təklif olunur.

ON AN APPLICATION OF THE METHODS OF KOWELL'S TYPE

G.Y.MEHDIYEVA, M.N.IMANOVA, V.R.IBRAHIMOV

SUMMARY

Recently, most scientists focus on the investigations of integral equations with variable boundaries which describe some events of natural sciences such as environment, challenges of ecology, dissemination of flu, and other seasonal deseases etc. The traditional method of solving such equations is the quadrature method which was first applied by Volterra to the solution of integral equations with variable boundaries. In comparison with the above mentioned methods, we suggest forward jumping methods with constant coefficients for the solution of integral equations with variable boundaries.